-EXERCICE 10.2-

• ENONCE :

« Parabole de sécurité »

• Un mortier tire un obus (assimilé à un point matériel de masse m) depuis un point O ; la vitesse initiale $\vec{v}_0$ de l'obus fait un angle α, ajustable à volonté, avec l'horizontale.

• Le référentiel d'étude, lié au sol, est supposé galiléen ; l'axe horizontal sera noté Ox, tandis que l'axe vertical sera noté Oy : le vecteur $\vec{v}_0$ appartient au plan Oxy.

• La résistance de l'air est négligée.

1) Soit H la plus haute altitude qui puisse être atteinte par l'obus tiré **verticalement** : exprimer H en fonction de v_0 et de g (= intensité du champ de pesanteur).
2) L'angle α est maintenant quelconque : déterminer la nature des trajectoires.
3) Exprimer en fonction de α et H la **portée** $X(\alpha)$ pour un tir vers une cible située dans le plan horizontal passant par le point O. Déterminer le maximum $X_{\max}$ de $X(\alpha)$, et la valeur $\alpha_{\max}$ correspondante.
4) Montrer qu'un point $M(x,y)$ ne peut être atteint par l'obus s'il est situé à l'extérieur d'une courbe de type parabolique (« **parabole de sécurité** »), dont on donnera l'équation.

EXERCICE **MECANIQUE DU POINT MATERIEL**

• **CORRIGE :**

« Parabole de sécurité »

1) Le PFD appliqué à l'obus s'écrit :

$m\vec{a} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_y \Rightarrow$ en projection sur les axes, il vient : $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$ et $\frac{d^2y}{dt^2} = -g \Rightarrow$

$\frac{dx}{dt} = cste = \frac{dx}{dt}(0) = 0 \Rightarrow$ $\boxed{x(t) = cste = x(0) = 0}$

• Par ailleurs : $\frac{dy}{dt} = -gt + \frac{dy}{dt}(0) = -gt + v_0$ (1) $\Rightarrow$ $\boxed{y((t) = -\frac{g}{2}\times t^2 + v_0 \times t + y(0) = -\frac{g}{2}\times t^2 + v_0 \times t \quad (2)}$

• Le sommet de la trajectoire est atteint pour un instant t_S tel que $\frac{dy}{dt}(t_S) = 0$; la relation (1) permet d'en déduire : $t_S = \frac{v_0}{g}$ $\Rightarrow$ d'après (2), on a : $\boxed{H = y(t_S) = -\frac{v_0^2}{2g} + \frac{v_0^2}{g} = \frac{v_0^2}{2g}}$

Rq1 : lorsque le chapitre suivant (consacré à l'aspect énergétique de la mécanique) aura été vu, on comprendra qu'une solution plus rapide est donnée par la « conservation de l'énergie mécanique » (en l'absence de frottements, seul le poids travaille et c'est une **force conservative**) ; en effet, on peut écrire :

$E_{méca} = E_C + E_P = cste = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = 0 + mgH$ $\Rightarrow$ on retrouve bien : $\boxed{H = \frac{v_0^2}{2g}}$

Rq2 : la conservation de l'énergie mécanique (qui fournit une seule équation scalaire) est suffisante pour répondre à la question car, pour $\alpha = \pi / 2$, l'obus ne possède qu'un seul degré de liberté, son mouvement selon l'axe Oy.

2) On reprend le PFD en projection sur les axes, mais avec: $\vec{v}_0 = v_0 \cos\alpha \times \vec{e}_x + v_0 \sin\alpha \times \vec{e}_y \Rightarrow$

$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = cste = \frac{dx}{dt}(0) = v_0 \cos\alpha \Rightarrow$ $\boxed{x(t) = v_0 \cos\alpha \times t + x(0) = v_0 \cos\alpha \times t \quad (3)}$

• D'autre part : $\frac{dy}{dt} = -gt + \frac{dy}{dt}(0) = -gt + v_0 \sin\alpha \Rightarrow$ $\boxed{y((t) = -\frac{g}{2}\times t^2 + v_0 \sin\alpha \times t \quad (4)}$

• L'équation (3) fournit : $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$ $\Rightarrow$ en reportant dans l'équation (4), on aboutit à :

$$\boxed{y(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}\times x^2 + \tan\alpha \times x = -\frac{x^2}{4H\cos^2\alpha} + \tan\alpha \times x \quad (5)}$$

Rq : il s'agit de l'équation d'une **parabole**.

3) La cible est atteinte au bout d'un temps t_1 tel que $y(t_1)=0$ $\Rightarrow$ la relation (4) fournit :

$t_1 = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$ $\Rightarrow$ en reportant dans (3), il vient : $\boxed{X(\alpha) = x(t_1) = 2\dfrac{v_0^2}{g}\sin\alpha \times \cos\alpha = 2H\sin(2\alpha)}$

• La portée maximum est obtenue pour $\sin(2\alpha)=1$ $\Rightarrow$ $\boxed{X_{max} = 2H}$ et $\boxed{\alpha_{max} = \pi/4 = 45°}$

4) Un point M, de coordonnées x et y, peut être atteint s'il existe un angle α vérifiant l'équation (5) ; en remarquant que $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\tan^2\alpha$, α doit être solution de l'équation en $\tan\alpha$:

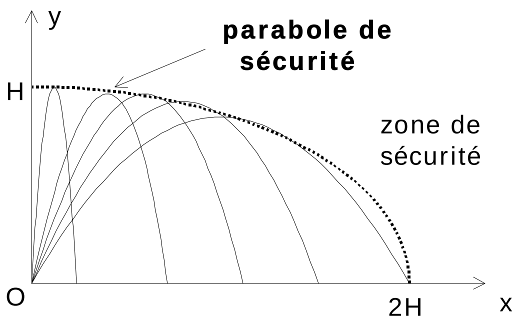
$$\boxed{x^2 \times \tan^2\alpha - 4Hx \times \tan\alpha + (x^2 + 4Hy) = 0 \qquad (6)}$$

• En fait, le point M est à l'abris de l'obus si l'équation (6) n'a pas de solution en $\tan\alpha$, donc si son discriminant est **négatif** ; la **courbe limite** de sécurité est donnée par un discriminant **nul** :

$\Delta' = 0 \Rightarrow 4H^2x^2 - x^2(x^2+4Hy) = 0 \Rightarrow$ $\boxed{x^2 = 4H(H-y)}$ (de la forme : $x^2 = 2pY$)

$\Rightarrow$ il s'agit d'une **parabole** d'axe Ox et de **paramètre** $p = 2H$ **.**

• On peut visualiser les résultats précédents sur la courbe ci-dessous :



Sur le dessin ci-contre, on a représenté la parabole de sécurité , ainsi que quelques trajectoires d'obus obtenues pour des angles différents.